TALLER No ________

NOMBRE DEL TALLER: Números Racionales

- **ÁREA: Matemática**
- **DOCENTE: Edison Arias**
- **GRUPO: 7-A, 7-B**
- **FECHA: Julio**

FASE DE PLANEACIÓN O PREPARACIÓN

COMPETENCIA:

Comprende y resuelve problemas, que involucran los números racionales con las operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación) en contextos escolares y extraescolares

EVIDENCIA DE APRENDIZAJE:

Reconoce claramente las características de los números racionales. Identifica y establece de manera adecuada relaciones entre los números racionales. Reconoce, correctamente, los números decimales como números racionales. Reconoce y utiliza la representación de fraccionaria de un número racional. Plantea y resuelve con precisión, operaciones aditivas y multiplicativas con números racionales. Identifica y aplica las propiedades de las operaciones entre números racionales.

FASE DE EJECUCIÓN O DESARROLLO

INSTRUCCIONES:

Hacer lectura crítica, escribir conceptos fundamentales, resolver los ejemplos y luego las actividades de aprendizaje.

TEORÍA:

1.1 Definición del conjunto $\mathbb{Q}$

El conjunto de números racionales se simboliza con la letra $\mathbb{Q}$ y se define como:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

Por ejemplo, las fracciones $\frac{4}{3}$, $-\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{9}$ son números racionales. De la misma forma, todo número entero es un número racional porque se puede escribir como una fracción. Así, el número 2 se puede escribir como $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \dots$

1. Escribir un número racional para cada situación.

a. Un pastel se divide en 8 partes iguales, ¿qué fracción del pastel representa una de las partes?

El número racional $\frac{1}{8}$ representa una parte del pastel, ya que el numerador indica una parte y el denominador el número total de partes.

b. Un automóvil recorre 119 km en 2 horas, ¿cuál es su velocidad?

El número racional que representa la velocidad del automóvil es $\frac{119}{2}$ km/h, que corresponde al cociente entre la distancia y el tiempo.

2. Sofía tiene una colección de 86 estampillas de las cuales 7 son de Italia.

a. ¿Qué fracción de las estampillas son de Italia?

En este caso, el denominador es la cantidad total de estampillas y el numerador la cantidad de estampillas de Italia. Por esto la fracción es $\frac{7}{86}$.

b. Si Sofía compra otras 86 estampillas, entonces el número de estampillas de Italia se triplica. Teniendo en cuenta esto, ¿cuál es la fracción que corresponde al número de estampillas que no son de Italia?

Primero, se tiene que el número total de estampillas es 172.

Luego, como se triplica el número de estampillas de Italia, entonces hay 21 estampillas de este país, lo que implica que de otros hay $172 - 21 = 151$ estampillas.

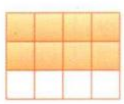
Finalmente, la fracción que representa la cantidad de estampillas de otros países es $\frac{151}{172}$.

1.2 Fracciones equivalentes

Actividad

Dos fracciones son equivalentes cuando representan la misma parte de una unidad. Por ejemplo, las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{8}{12}$ son equivalentes, como se muestra en la siguiente figura.

$\frac{2}{3}$



$\frac{8}{12}$

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ **son fracciones equivalentes**, entonces se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $b, d \neq 0$, y se cumple que $a \times d = b \times c$.

Así, como las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{8}{12}$ son equivalentes, entonces se tiene que $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ porque $2 \times 12 = 3 \times 8 = 24$.

Para encontrar fracciones equivalentes a una fracción dada se utiliza la simplificación y la complificación.

Simplificación de fracciones

Para simplificar una fracción se dividen tanto el numerador como el denominador entre su máximo común divisor (mcd), con lo cual se obtiene una fracción equivalente.

Por ejemplo, en la fracción $\frac{18}{24}$ se tiene que mcd $(18, 24) = 6$, con lo cual la simplificación de la fracción es:

$$\frac{18}{24} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6} = \frac{3}{4}, \text{ de donde, } \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

Como la fracción $\frac{3}{4}$ no se puede simplificar más, entonces se dice que es una fracción irreducible.

Una fracción es **irreducible** cuando no hay divisores comunes entre el numerador y el denominador, es decir, cuando el mcd entre el numerador y el denominador es igual a 1.

Complificación de fracciones

Para complificar una fracción se multiplica tanto el numerador como el denominador por el mismo número, con lo cual se obtienen fracciones equivalentes.

Por ejemplo, la complificación de la fracción $\frac{4}{5}$ por 3, se realiza así:

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}, \text{ de donde, } \frac{4}{5} = \frac{12}{15}$$

A partir de la simplificación y complificación de fracciones es posible construir un conjunto de fracciones equivalentes a una fracción dada.

Por ejemplo, el conjunto formado por todas las fracciones equivalentes a $\frac{3}{2}$ es:

$$\left\{\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}, \frac{12}{8}, \frac{15}{10}, \dots\right\}$$

Como la fracción $\frac{3}{2}$ es irreducible, entonces $\frac{3}{2}$ es el número **racional representante** del conjunto.

1.3 Clasificación de racionales

Los números racionales se pueden clasificar en:

- **Racionales positivos**: cuando el numerador y el denominador tienen el mismo signo. Por ejemplo, el número $\frac{5}{6}$ es positivo.
- **Racionales negativos**: cuando el numerador y el denominador tienen signos diferentes. Por ejemplo, el número $\frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}$ es negativo.
- **Racionales nulos**: cuando el numerador es igual a cero. Por ejemplo, el número $\frac{0}{8} = 0$ es nulo.
- **Racionales enteros**: cuando el denominador es igual a 1, o cuando el numerador es múltiplo del denominador. Por ejemplo, $\frac{-10}{1} = -10$ y $\frac{12}{4} = 3$ son enteros.

1.4 Números mixtos

Un **número mixto** es un racional que se expresa como la suma de un entero y una fracción. Por ejemplo, el número mixto $3\frac{1}{2}$ representa al número racional $\frac{7}{2}$.

Conversión de fracción a número mixto

Para convertir una fracción impropia a número mixto se realizan los siguientes pasos:

Primero, se divide el numerador entre el denominador.

Luego, se toma el cociente de la división como la parte entera del número mixto.

Finalmente, se escribe la parte fraccionaria teniendo en cuenta que el numerador es el residuo de la división y el denominador es el divisor.

Conversión de número mixto a fracción

Para convertir de número mixto a fracción impropia se realizan los siguientes pasos:

Primero, se multiplica la parte entera por el denominador de la fracción.

Luego, se suma el producto anterior al numerador.

Finalmente, se deja el mismo denominador.

Por tanto, si $a, b, c \in \mathbb{N}$ y $c \neq 0$, entonces se tiene que:

$$a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} = \frac{a \times c + b}{c}$$

EJEMPLO

Un motociclista maneja con una velocidad constante de $60\frac{9}{13}$ kilómetros por hora. Suponiendo que pudiera manejar durante 13 horas continuas, ¿cuántos kilómetros recorrería?

Una forma de resolver el problema es convertir el número mixto a fracción. Por tanto, se tiene que:

$$60\frac{9}{13} = 60 + \frac{9}{13} = \frac{60 \times 13 + 9}{13} = \frac{789}{13}$$

Como la velocidad v es igual a $v = \frac{d}{t} = \frac{789}{13}$, donde d es la distancia y t es el tiempo, entonces, se concluye que el motociclista recorrería 789 kilómetros en 13 horas.

1.5 Representación decimal de un número racional

Una **fracción decimal** es aquella cuyo denominador es una potencia de 10.

Las fracciones decimales se leen según la potencia de 10 que corresponde a su denominador. Por ejemplo, las fracciones $\frac{3}{10}$, $\frac{15}{100}$ y $\frac{47}{1.000}$ se leen tres décimos, quince centésimos y cuarenta y siete milésimos respectivamente.

Una fracción decimal se puede representar mediante un número decimal. Los números decimales están formados por una **parte entera**, que se escribe antes de la coma, y por una **parte decimal** que se escribe después de la coma. Para expresar una fracción decimal como un número decimal se escribe el numerador y se separan de derecha a izquierda sus cifras con una coma, según la cantidad de ceros que tenga el denominador.

Por ejemplo,

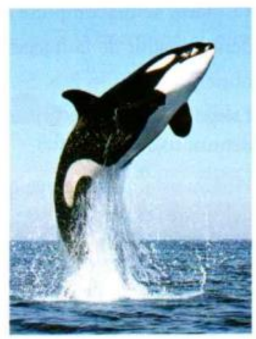
$$\frac{4}{10} = 0{,}4 \qquad \frac{2.538}{100} = 25{,}38 \qquad \frac{841.912}{1.000} = 841{,}912$$

Cada cifra de un número decimal tiene un valor determinado según su posición. Así, la tabla de posición de los anteriores números decimales es:

Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades	Coma	Décimas	Centésimas	Milésimas
UM	C	D	U	,	d	c	m
			0	,	4		
		2	5	,	3	8	
	8	4	1	,	9	1	2

EJEMPLO

Una orca puede llegar a pesar cerca de $\frac{5.500}{1.000}$ t (toneladas) si es macho, o $\frac{411}{100}$ t si es hembra. Además, la longitud del macho puede ser hasta de $\frac{89}{10}$ m y la hembra puede alcanzar los $\frac{77.000}{10.000}$ m. Expresar las medidas de la orca con números decimales.



Primero, se expresan con números decimales los pesos de una orca, según si es macho o hembra. Para esto, se escribe el numerador de cada fracción y se ubica la coma de derecha a izquierda según la cantidad de ceros del denominador.

$$\frac{5.500}{1.000} = 5,5 \text{ y } \frac{411}{100} = 4,11$$

Luego, se convierten de la misma forma las longitudes a números decimales.

$$\frac{89}{10} = 8,9 \text{ y } \frac{77.000}{10.000} = 7,7$$

Finalmente, se tiene que si una orca es macho, puede llegar a tener 5,5 t de peso y 8,9 m de longitud, y si es hembra su peso es 4,11 t y su longitud 7,7 m.

1.6 Clasificación de los números racionales decimales

Los números decimales se clasifican en números decimales exactos y números decimales periódicos, los cuales a su vez pueden ser periódicos puros o periódicos mixtos.

Decimal exacto	Decimal periódico puro	Decimal periódico mixto
Es aquel que tiene una cantidad finita de cifras decimales. Se obtiene de fracciones decimales o de fracciones irreducibles cuyos denominadores tienen como factores primos solamente a 2 o 5.	Es aquel número cuya parte decimal se repite infinitas veces. Se obtiene de fracciones irreducibles con denominadores que no tienen como factores primos a 2 o a 5. La parte decimal se denomina período e inicia inmediatamente después de la coma.	Es aquel cuyo período no empieza inmediatamente después de la coma. Se obtiene de fracciones irreducibles cuyos denominadores tienen, además de 2 o de 5, otros factores primos.

Para convertir una fracción a número decimal se divide el numerador entre el denominador.

EJEMPLOS

El deshielo de los glaciares de Alaska ha provocado que el nivel del mar aumente en $\frac{7}{50}$ milímetros anualmente.

a. Determinar qué tipo de número decimal representa el aumento del nivel del mar.

Primero, se descompone en factores primos el denominador de la fracción $\frac{7}{50}$ con lo cual se obtiene que $50 = 2 \times 5^2$.

Luego, se tiene que los únicos factores primos que resultan en la descomposición del denominador son 2 y 5.

Finalmente, se concluye que el número decimal que representa el aumento en el nivel del mar es exacto.

1.7 Conversión de número decimal a fracción

Para determinar la fracción que representa un número decimal, se debe tener en cuenta si es un número decimal exacto, periódico puro o periódico mixto.

Conversión de número decimal exacto a racional

La **conversión de un número decimal exacto a fracción** se realiza mediante los siguientes pasos:

Primero, se escribe como numerador todo el número sin considerar la coma decimal.

Luego, se escribe como denominador la potencia de diez que tiene tantos ceros como cifras decimales tiene el número.

Finalmente, se simplifica la fracción decimal obtenida hasta obtener una fracción irreducible.

Por ejemplo,

$$5,29 = \frac{529}{100}$$

→ Parte entera y decimal sin coma.

→ Potencia de diez con tantos ceros como cifras decimales tiene el mismo número.

Conversión de un número decimal periódico puro a racional

Para **convertir un decimal periódico puro a fracción** se realizan los siguientes pasos:

Primero, se escribe en el numerador todo el número hasta el final del primer período sin considerar la coma, y se resta con la parte entera del número.

Luego, en el denominador se escriben tantos nueves como cifras tiene el período.

Finalmente, se simplifica hasta obtener una fracción irreducible.

Por ejemplo,

$$5,\widehat{16} = \frac{516-5}{99} = \frac{511}{99}$$

→ Diferencia entre el número sin coma y la parte entera.

→ Tantos 9 como cifras tiene el período.

Conversión de un número decimal periódico mixto a racional

Para **convertir un decimal periódico mixto a fracción** se realizan los siguientes pasos:

Primero, se escribe en el numerador todo el número hasta el final del primer período sin la coma, y se le resta el número resultante de suprimir las cifras del período.

Luego, se escribe en el denominador tantos nueves como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal no periódica.

Finalmente, se simplifica hasta obtener una fracción irreducible.

Por ejemplo,

$$1,3\widehat{12} = \frac{1312-13}{990} = \frac{1299}{990}$$

→ Diferencia entre el número sin la coma y el número resultante de suprimir las cifras del período.

→ Tantos 9 como cifras tiene el período y tantos 0 como tiene la parte decimal no periódica.

$$= \frac{433}{330}$$

Se simplifica, si es posible.

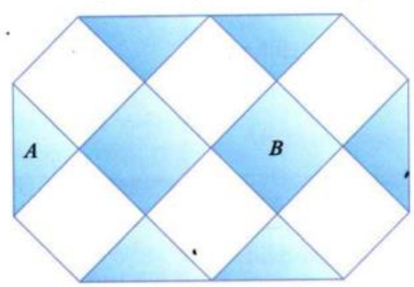
FASE DE EVALUACIÓN

ACTIVIDAD A EVALUAR:

Escribe el número racional que representa cada situación.

1. La fracción que representa el número de caballos negros, con respecto a la cantidad total de fichas del ajedrez.
2. La fracción que representa los números pares en un dado.
3. La fracción que representa el número de días del mes de diciembre con respecto al número de días de un año bisiesto.

Observa la siguiente figura. Luego, responde.



4. ¿Qué número racional representa la parte de color azul?
5. ¿Qué fracción de toda la figura corresponde a la región *A*?
6. ¿Qué fracción de toda la figura corresponde a la región *B*?

E Relaciona cada número mixto con la fracción impropia que le corresponde.

25. $7\frac{1}{5}$ **a.** $\frac{14}{5}$

26. $5\frac{2}{5}$ **b.** $\frac{18}{5}$

27. $3\frac{3}{5}$ **c.** $\frac{21}{5}$

28. $2\frac{4}{5}$ **d.** $\frac{36}{5}$

29. $4\frac{1}{5}$ **e.** $\frac{27}{5}$

E Convierte las siguientes fracciones impropias a número mixto.

30. $\frac{12}{5}$ **32.** $\frac{21}{4}$ **34.** $\frac{45}{7}$

31. $\frac{62}{3}$ **33.** $\frac{73}{9}$ **35.** $\frac{102}{13}$

R Completa cada fila con fracciones equivalentes a las dadas.

36.

		$-\frac{12}{5}$		

37.

$2\frac{3}{4}$				

38.

			$-1\frac{3}{10}$	

79. Completa la tabla.

Parte entera	Parte decimal	Número decimal	Fracción decimal
5		5,12	
2	777...		
		$13,2\overline{1}$	
			$\frac{43}{45}$

E Expresa cada número decimal como una fracción y descubre el nombre de un parque natural de Colombia.

80. 7,2 R

81. 0,35 U

82. $0,\overline{12}$ C

83. $5,\overline{4}$ M

84. $0,1\overline{5}$ I

85. $0,2\overline{05}$ A

$\frac{49}{9}$	$\frac{203}{990}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{203}{990}$